Comentari: (Redacció)

Si tenim en compte les restriccions de l'enunciat per a α, aleshores $\dfrac{k-1}{n} < \dfrac{k\alpha}{n} < \dfrac{k}{n}$, $1 \le k \le n$, i resulta que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k\alpha}{n}\right)\log\left[1+\left(\frac{k\alpha}{n}\right)^2\right]$$

és una suma de Riemann per a la funció

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x^2)$$

com abans, però ara a l'interval $[0,1]$. Per tant,

$$\log L = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x^2)\,dx = \\ = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan x) - \frac{1+x^2}{2}\right]_0^1 = \\ = \ln 4 + \frac{\pi-5}{2}$$

i

$$L = \exp\left(\ln 4 + \frac{\pi-5}{2}\right) = 4\,e^{(\pi-5)/2} \simeq 1.579,$$

amb total coherència amb la solució anterior, si hi prenem $\alpha = 1$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Oriol Guasch i Fortuny va llegir la seva tesi, dirigida per Ramon Codina Rovira, titulada *Computational aeroacoustics and turbulence modelling of low speed flows using subgrid scale stabilised finite element methods*, el dia 8 de novembre de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquesta tesi aborda la simulació de la generació i propagació de soroll aerodinàmic dins del marc dels mètodes d'elements finits estabilitzats amb subescales. Per tal de fer-ho, es simula tant la dinàmica de fluxos no periòdics i/o turbulents com el camp acústic que aquests generen.

La metodologia d'aeroacústica computacional (CAA) proposada es basa en l'analogia acústica de Lighthill i conceptualment es pot dividir en tres fases. En la primera, es duu a terme una simulació de fluidodinàmica computacional (CFD) per tal de calcular el terme font de soroll aerodinàmic. En el cas d'un flux turbulent, s'acostumen a utilitzar els anomenats *models de remolins grans* (LES), que es basen en convolucionar les equacions de Navier-Stokes amb un filtre passa-baix, i discretitzar-les posteriorment un cop escollit un model de clausura. Tot i tractar-se d'un enfocament molt estès, el LES presenta nombrosos problemes de caire matemàtic, com no permetre distingir clarament els errors que provenen del model físic dels que provenen de l'esquema de discretització numèrica. Com a alternativa al LES per simular fluxos turbulents, en aquesta tesi s'han emprat models d'elements finits estabilitzats mitjançant subescales (SGS). Aquests ofereixen una separació d'escales natural entre aquelles que són resolubles amb la malla discreta utilitzada i aquelles que no són capturables per la malla (subescales o escales de submalla). L'aplicació dels mètodes SGS a les equacions de Navier-Stokes permet plantejar el problema de simulació de la turbulència com un problema numèric més que no pas físic. Combinant resultats de la mecànica estadística de fluids amb resultats de la matemàtica dels mètodes numèrics, la tesi presenta una prova heurística que dóna suport a la idea

que els mètodes SGS haurien de ser suficients per representar el comportament de fluxos turbulents en el subrang inercial.

La segona fase de la metodologia proposada consisteix a calcular el terme font acústica, en aquest cas la doble divergència del tensor de Lighthill. L'evolució temporal d'aquest terme s'obté de la simulació CFD i la seva transformada de Fourier permet construir una equació de Helmholtz inhomogènia, que novament es resoldrà utilitzant mètodes SGS d'elements finits. Ja que es consideren fluxos de poca velocitat, el lligam d'incompressibilitat permet calcular la doble divergència del tensor de Lighthill fent servir funcions d'interpolació lineals.

La tercera fase consisteix a avaluar el camp acústic resolent l'equació inhomogènia de Helmholtz. És un fet prou conegut que, per a nombres d'ona elevats, la forma dèbil del problema no és definida positiva, de manera que l'anomenat *error de pol·lució* apareix en la resolució numèrica de l'equació de Helmholtz. Una anàlisi de dispersió de l'*stencil* associat al problema discret revela que l'error de pol·lució es pot atribuir al fet que les ones es propaguen amb un nombre d'ona discret diferent del continu. La diferència entre ambdós augmenta per a nombres d'ona elevats i apareix un error de fase en l'ona aproximada. Un comportament similar es pot observar en l'equació de Helmholtz convectada, que té importància en diverses àrees de l'aeroacústica com en la generació de soroll aerodinàmic de ventiladors i compressors. Per tal de disminuir l'error de pol·lució de l'equació de Helmholtz convectada, a la tesi es proposa un mètode SGS d'elements finits pel cas bidimensional. El mètode és formalment equivalent al mètode Galerkin Least-Squares (GLS) i la seva clau rau a trobar un paràmetre d'estabilització adequat mitjançant una anàlisi de dispersió. Es comprova que el mètode proposat millora clarament els resultats del mètode de Galerkin i que el paràmetre d'estabilització es redueix a paràmetres coneguts per l'equació de Helmholtz, en el cas en què no hi ha convecció.

- Cristina Dalfó Simó va llegir la seva tesi, dirigida per Francesc Comellas Padró i Miquel Àngel Fiol Mora, titulada *Estudi i dissenys de xarxes d'interconnexió: modularitat i comunicació*, el dia 19 de desembre de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Normalment les grans xarxes d'interconnexió o de comunicacions estan dissenyades utilitzant tècniques de la teoria de grafs. Aquest treball presenta algunes contribucions a aquest tema. Concretament, presentem dues noves operacions: el *producte jeràrquic* de grafs i el *producte Manhattan* de dígrafs. El primer és una generalització del producte cartesià de grafs i ens permet construir algunes famílies amb un alt grau de jerarquia, com l'*arbre binomial*, que és una estructura de dades molt utilitzada en algorísmica. El segon dóna lloc a les conegudes *Manhattan street networks*, les quals han estat extensament estudiades i utilitzades per modelitzar alguns tipus de xarxes òptiques. En el nostre treball, definim formalment i analitzem el cas multidimensional d'aquestes xarxes. Estudiem algunes propietats dels grafs o dígrafs obtinguts mitjançant les dues operacions esmentades, especialment: els paràmetres estructurals (les propietats de l'operació, els subdígrafs induïts, la distribució de graus i l'estructura de dígraf línia), els paràmetres mètrics (el diàmetre, el radi i la distància mitjana), la simetria (els grups d'automorfismes i els dígrafs de Cayley), l'estructura de cicles (els cicles hamiltonians i la descomposició en cicles hamiltonians arc-disjunts) i les propietats espectrals (els valors i vectors propis). En el darrer cas, hem trobat, per exemple, que la família dels arbres binomials tenen tots els seus valors propis diferents i «omplen» tota la recta real. A més a més, mostrem la relació del seu conjunt de vectors propis amb els polinomis de Txebixev de segona espècie. També hem estudiat alguns protocols de comunicació, com els enrutaments locals i els algorismes de difusió. Finalment, presentem alguns models deterministes (com les *xarxes Sierpinski* i d'altres), els quals presenten algunes propietats pròpies de les xarxes complexes de la vida real (com, per exemple, Internet).

- Daniel Blasi Babot va llegir la seva tesi, dirigida per Artur Nicolau Nos, titulada *Successions d'interpolació en certs espais de funcions*, el dia 1 de febrer de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Donades dues successions finites de punts $\{z_n\}, \{w_n\}$ al disc unitat obert $\mathbb{D}$, el problema d'existència d'una funció analítica $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ amb $f(z_n) = w_n$, $n = 1, \ldots, N$ és considerat el primer problema d'interpolació mai estudiat. La caracterització d'aquestes successions fou obtinguda durant la primera dècada del segle XX per Nevanlinna i Pick.

Als anys cinquanta, R. C. Buck va plantejar un nou problema d'interpolació a l'àlgebra H^∞ de les funcions analítiques i acotades al disc $\mathbb{D}$. Una successió de punts $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ es diu d'interpolació per H^∞ si per tota successió de valors acotats $\{w_n\}$ existeix una funció f analítica i acotada a $\mathbb{D}$ amb $f(z_n) = w_n$ per tota $n = 1, 2, \ldots$. L'any 1958, L. Carleson va provar una caracterització geomètrica d'aquestes successions.

En aquesta memòria estudiem i caracteritzem les successions d'interpolació en dos espais de funcions diferents. En el primer capítol, que correspon a l'article [1], estudiem les successions d'interpolació per l'espai de funcions harmòniques i positives h^+, mentre que el segon capítol presenta resultats dels articles [2] i [3], on s'estudien les successions d'interpolació per als espais de tipus Besov $B_p(s)$.

En el primer capítol, utilitzant la desigualtat de Harnack per a funcions harmòniques i positives al semiplà $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, es planteja un problema d'interpolació en h^+. La solució d'aquest problema s'obté provant una condició que caracteritza geomètricament les successions d'interpolació en aquest espai. Així mateix, es planteja i es resol també un problema d'interpolació per a funcions holomorfes i acotades sense zeros. El problema d'interpolació per l'espai de funcions harmòniques i positives definides al semiespai $\mathbb{R}^{d+1}_+ = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ en dimensions d majors o iguals que 2 resta com a problema obert. Obtenim, però, una condició necessària per a la interpolació que conjecturem de ser també suficient.

Al segon capítol s'estudien les successions d'interpolació per als espais de tipus Besov $B_p(s)$ de funcions analítiques f amb

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2+s} dA(z) < \infty,$$

per a $1 < p < \infty$ i $0 < s < 1$, així com les successions d'interpolació pels corresponents espais de multiplicadors $\mathcal{M}(B_p(s))$. La caracterització de les successions d'interpolació en ambdós espais s'obté en termes d'una condició de separació i una altra de mesura de Carleson. Així mateix, en aquest capítol, es prova una nova caracterització dels espais de Besov $B_p(s)$ sense utilitzar derivades i es resol el problema de la corona a l'espai $\mathcal{M}(B_p(s))$.

Bibliografia

[1] Blasi, D.; Nicolau, A. «Interpolation by positive harmonic functions». *J. London Math. Soc.*, (2), 76 (2007), pàg. 253-271.

[2] Blasi, D.; Pau, J. «A characterization of Besov type spaces and applications to Hankel type operators». *Michigan Math. J.*, 56, 2 (2008), pàg. 401-417.

[3] Arcozzi, N.; Blasi. D.; Pau, J. «Interpolating sequences on analytic Besov type spaces». *Indiana Univ. Math. J.*, 58 (2009).

- Jordi Marzo Sánchez va llegir la seva tesi, dirigida per Joaquim Ortega-Cerdà, titulada *Sampling sequences in spaces of bandlimited functions in several variables*, el dia 25 d'abril de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.

A grans trets, una successió de mostreig per a un cert espai de funcions és una successió de punts $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tals que la norma de tota funció f de l'espai és equivalent a la norma de la successió que resulta d'avaluar la funció:

$$\|f\| \sim \|(f(x_n))_{n\in\mathbb{Z}}\|.$$

Són, doncs, els conjunts adequats per a discretitzar o digitalitzar un senyal continu. Al seu torn, una successió d'interpolació és tal que qualsevol problema d'interpolació es pot resoldre mitjançant una funció de l'espai. Aquest concepte està relacionat amb el fet que el senyal continu es pugui recuperar a partir de la digitalització i es pot considerar, en un cert sentit, com a dual del de mostreig.

Al primer capítol de la tesi trobem successions de mostreig i d'interpolació per a l'espai de funcions amb freqüències a una unió de traslladats d'un cub; el resultat és, doncs, una generalització del teorema de Shannon. Amb aquest resultat hom pot trobar successions de mostreig i d'interpolació amb densitat arbitràriament propera a la crítica (raó de Nyquist) per a l'espai de Paley-Wiener sobre un domini qualsevol de l'espai euclidià. L'existència d'aquestes successions demostra en particular que els resultats sobre densitats de H. J. Landau de 1967 són òptims.

A la resta de la tesi passem a estudiar les famílies de Marcinkiewicz-Zygmund (MZ) (concepte anàleg al de mostreig) i d'interpolació per a espais de polinomis a l'esfera.

Al cercle, els conjunts formats per les successives arrels de la unitat ens donen una família triangular de punts «ben distribuïts». Per a aquests es compleix que

$$\frac{A}{n}\sum_{k=0}^{n}|p(e^{\frac{2\pi ik}{n+1}})|^p \leq \int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{B}{n}\sum_{k=0}^{n}|p(e^{\frac{2\pi ik}{n+1}})|^p \qquad (1)$$

per a tot polinomi p de grau $\leq n$ amb constants $(A, B > 0)$ independents del grau (J. Marcinkiewicz i A. Zygmund, 1937).

A la tesi trobem una nova caracterització de les famílies de MZ que ens permet obtenir tot de resultats. Per exemple: és conegut que una petita pertorbació d'una família de MZ també és de MZ però, com de gran pot ser aquesta pertorbació? En un anàleg al teorema de Kadets, demostrem que podem pertorbar les arrels de la unitat a (1) fins a 1/4 i que el resultat és òptim.

Així com pel cercle tenim fins i tot una caracterització de les famílies de MZ, en dimensions més grans les coses es compliquen. Un primer problema és que a l'esfera no hi ha famílies de punts tant «ben distribuïts» com les arrels de la unitat, cosa que es tradueix en el fet, demostrat a la tesi, que no hi ha famílies de punts que donin bases ortonormals de nuclis reproductors. Així doncs, no hi ha família de referència. Tanmateix, estudiant l'operador de concentració sobre l'esfera podem trobar condicions geomètriques necessàries si es verifica la propietat de MZ o la d'interpolació. No només no hi ha famílies que donin bases ortonormals de nuclis reproductors, sinó que no es coneix cap exemple de família que sigui de MZ i d'interpolació alhora però, podríem trobar-ne una? A la tesi demostrem que la resposta és negativa quan $p \neq 2$.

Trobar punts ben distribuïts a l'esfera és un problema d'interès pràctic a diverses disciplines: meteorologia, cristal·lografia... De fet, existeixen tot de mètodes per a trobar punts (punts de Fekete, minimitzadors d'un cert potencial, esquemes aleatoris...). Un problema seria, doncs, estimar com són de bones aquestes distribucions. Atès que l'estabilitat a l'hora de recuperar un senyal a partir d'una discretització és una mesura d'aquesta bona distribució, i que aquesta és (en un cert sentit) la definició mateixa de família de MZ, a la tesi ens interessem per a trobar condicions suficients per a ser de MZ. El fet remarcable és que la condició que obtenim és força més fàcil de verificar que les ja conegudes.

Parlant d'aplicacions, estudiem també la reconstrucció d'una funció a partir de les seves integrals sobre hiperplans (transformada de Radon). Aquest problema és important, per exemple, en el domini de la tomografia computeritzada. A la tesi demostrem que la norma de la funció de densitat a reconstruir es pot controlar (essencialment) per les projeccions, tan bon punt aquestes formin una família de MZ amb prou punts. Així doncs, aquestes famílies de punts són els bons candidats de cara a obtenir esquemes de mostreig.

La propietat de MZ diu que la norma dels polinomis és comparable (amb constants independents del grau) a la norma discreta de l'avaluació a la família de punts. Però, què podem dir sobre comparació de normes sobre conjunts

menys singulars que una unió finita de punts? Atès que aquest problema és més senzill, en aquest cas podem portar-ho més enllà i caracteritzar els conjunts pels quals tenim comparació de normes respecte a mesures molt generals, com les mesures doblants (resultat que es demostra que és òptim en un cert sentit). Finalment, d'aquest resultats derivem un principi d'incertesa per a polinomis a l'esfera.

- Llorenç Rubió i Pons va llegir la seva tesi, dirigida per Pere Pascual Gainza, titulada *Categories de descens: aplicacions a la teoria K algebraica*, el dia 8 de juliol de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquest treball se situa en el marc de l'estudi de la cohomologia de les varietats algebraiques, i en particular en les aplicacions cohomològiques del teorema de resolució de singularitats d'Hironaka. Utilitzem la tècnica de les hiperresolucions cúbiques i el criteri d'extensió de functors de Guillén i Navarro per a definir una variant de la teoria K algebraica de les varietats sobre un cos de característica zero, que coincideix amb la teoria K per a les varietats llises i que satisfà una propietat de descens respecte als *blow-ups* abstractes.

La tècnica de les hiperresolucions cúbiques de Vicenç Navarro és un instrument alternatiu al dels hiperrecobriments simplicials de Deligne i dóna un marc general per a l'ús cohomològic del teorema d'Hironaka. Les hiperresolucions cúbiques permeten substituir una varietat, possiblement singular, per un diagrama cúbic i finit de varietats llises. Basant-se en la teoria de les hiperresolucions cúbiques, F. Guillén i V. Navarro han provat un criteri d'extensió per a functors cohomològics definits en les varietats llises a functors cohomològics definits en totes les varietats.

El criteri d'extensió de Guillén i Navarro s'aplica a functors que prenen valors en una categoria de descens. La noció de categoria de descens és una variant més rígida de la de categoria triangulada de Verdier, adaptada a la formulació de les teories cohomològiques no additives.

El primer problema que hem estudiat en el nostre treball és el de la relació entre les categories de models i les categories de descens. Les categories de models, introduïdes per Quillen, han estat profusament utilitzades en les darreres dècades com una axiomatització útil per a fer teoria d'homotopia. Hem demostrat que les categories de models que satisfan un cert criteri d'aciclicitat tenen una estructura de categoria de descens. En particular hem demostrat que la categoria d'espectres topològics és una categoria de descens.

La teoria K algebraica d'una varietat es construeix a partir dels seus fibrats vectorials algebraics i es pot considerar com un functor $\mathcal{K} : \mathbf{Var}(k) \to \mathbf{Sp}$ de varietats algebraiques a espectres topològics. Els grups de teoria K d'una varietat X s'obtenen a partir dels grups d'homotopia de l'espectre $\mathcal{K}X$, $K_m X = \pi_m(\mathcal{K}X)$. Les condicions d'extensió per a la teoria K són bàsicament conseqüència dels resultats de Thomason per a la teoria K d'un *blow-up*, de manera que el teorema d'extensió és aplicable a la teoria K algebraica de les varietats llises. Així el functor $\mathcal{K}$ admet una extensió de les varietats llises a totes les varietats. El functor estès $\mathcal{KD}$ satisfà una propietat de descens respecte als *blow-ups* abstractes, i aquesta extensió és essencialment única amb aquesta propietat. La propietat de descens significa que el functor porta un cert tipus de quadrats cartesians de varietats a quadrats homotòpicament cartesians d'espectres. Els quadrats homotòpicament cartesians d'espectres donen lloc a la successió de Mayer-Vietoris i en general a certes successions espectrals.

També hem estudiat les propietats que la teoria obtinguda pel criteri d'extensió hereta de les propietats del functor sobre les varietats llises. En particular hem vist que la teoria K de descens satisfà per exemple les propietats de Mayer-Vietoris i d'invariància homotòpica.

Un functor de varietats a espectres també s'anomena *un prefeix d'espectres*. Des d'aquest

punt de vista la teoria de les *cd*-topologies associades a quadrats commutatius desenvolupada per Voevodsky aplicada a l'estructura de categoria de models de prefeixos d'espectres de Jardine permet definir el reemplaçament fibrant d'un prefeix d'espectres considerant una certa topologia. Per tant, sorgeix la qüestió de comparar l'extensió de Guillén i Navarro amb el reemplaçament fibrant amb la topologia dels *blow-ups* abstractes. Hem demostrat que, quan són comparables, coincideixen.

Hem demostrat també que la teoria K de descens és equivalent, per un resultat de Haesemeyer, a la teoria K homotòpica introduïda per Weibel. Així mateix hem demostrat que hi ha una filtració pel pes natural en els grups de teoria K de descens.

- Gemma Colomé i Nin va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Elias Garcia, titulada *Multigraded structures and the depth of blow-up algebras*, el dia 14 de juliol de 2008. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.

En àlgebra commutativa, els mòduls graduats, així com els multigraduats estàndards, han estat objecte d'estudi per a molts autors. Tot i que també es coneixen resultats per mòduls graduats noestàndard, el cas multigraduat noestàndard no és tan comú. D'altra banda, sota el nom d'àlgebres de *blow-up*, es coneixen algunes àlgebres graduades associades a un ideal d'un anell local Noetherià. Les àlgebres de *blow-up* s'utilitzen per estudiar propietats i caràcters numèrics de l'anell local i de l'ideal i, a més, tenen rellevància geomètrica.

Un primer objectiu d'aquesta tesi és contribuir al coneixement de propietats cohomològiques de mòduls multigraduats noestàndard. En una primera part considerem anells multigraduats S finitament generats sobre l'anell local $S_{\underline{0}}$ per elements de graus $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ amb $\gamma_i = (\gamma_1^i, \ldots, \gamma_i^i, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^r$ i $\gamma_i^i \neq 0$ per a $i = 1, \ldots, r$. En primer lloc demostrem que la funció de Hilbert d'un S-mòdul multigraduat és quasipolinòmica en un con de $\mathbb{N}^r$ definit pels graus. A més es satisfà la fórmula de Grothendieck-Serre en la nostra situació.

Utilitzant el comportament quasipolinòmic de la funció de Hilbert dels mòduls d'homologia de Koszul d'un S-mòdul M multigraduat respecte d'un sistema de generadors de l'ideal maximal de $S_{\underline{0}}$, podem demostrar que la profunditat de les components homogènies de M és constant per a graus en una subxarxa d'un con de $\mathbb{N}^r$. Considerant els anells de *blow-up* multigraduats associats a ideals $I_1, \ldots, I_r$ en un anell local Noetherià R, podem demostrar que la profunditat de $R/I_1^{n_1} \cdots I_r^{n_r}$ és constant per a $n_1, \ldots, n_r$ prou grans.

També estudiem la profunditat dels mòduls de Veronese $M^{(\underline{a},\underline{b})}$ per a $\underline{a}, \underline{b}$ prou grans. En particular demostrem en el cas quasiestàndard (on els graus són múltiples per un escalar enter positiu dels graus estàndard), amb $S_{\underline{0}}$ quocient d'un anell local regular, que aquesta profunditat és constant per a $\underline{a}, \underline{b}$ en certes regions de $\mathbb{N}^r$. Per arribar a aquest resultat ens cal un estudi previ dels mòduls de Veronese i de l'anul·lació de mòduls de cohomologia local. En particular demostrem que, en el cas més general, si $S_{\underline{0}}$ és quocient d'un anell local regular, la profunditat generalitzada és invariant per transformacions Veronese. A més en el cas quasiestàndard la profunditat generalitzada coincideix amb l'índex de graduació finita dels mòduls de cohomologia local respecte de l'ideal maximal homogeni.

Un segon objectiu de la tesi és l'estudi de la profunditat de les àlgebres de *blow-up* associades a un ideal. S'obtenen versions refinades de conjectures sobre la profunditat de l'anell graduat associat a un ideal. Utilitzant algunes estructures bigraduades noestàndard, es poden interpretar els enters que apareixen a la conjectura de Guerrieri i a la conjectura de Wang com a multiplicitats de mòduls bigraduats. En particular hem pogut donar resposta a una pregunta formulada per A. Guerrieri i C. Huneke el 1993. Hem demostrat que donat un ideal I $\mathfrak{m}$-primari en un anell local $(R, \mathfrak{m})$ Cohen-Macaulay de dimensió $d > 0$ amb reducció minimal J, suposant que les longituds de les components homogènies

del mòdul de Valabrega-Valla de I i J siguin menors o iguals que 1, aleshores la profunditat de l'anell graduat associat a I és major o igual que $d-2$.

- Josep M. Palmada Privat va llegir la seva tesi, dirigida per Àngel Calsina Ballesta, titulada *Poblacions estructurades i evolució de cicles biològics: edat de maduració i temps de lisi en bacteriòfags*, el dia 14 de novembre de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

En aquesta tesi s'estudien dos models de dinàmica de poblacions estructurades que, tot i tenir naturalesa molt diferent, tots dos fan referència a cicles biològics de la població en qüestió i es fa èmfasi en l'estudi de paràmetres que determinen aquests cicles.

La memòria està estructurada en dos capítols ben diferenciats, tot i que l'objectiu de tots dos és comú. En el primer model s'estudia una població abstracta on hi ha dos tipus d'individus: joves i adults (o no fèrtils i fèrtils respectivament). El pas de jove a adult es fa quan s'arriba a certa edat de maduració; per això la densitat de població té una doble estructura. Aquesta s'estructura tant fisiològicament (per l'edat) com fenotípicament (per l'edat de maduració, variable que es considera fixada genèticament tot i que subjecta a mutació hereditària: una variable evolutiva). Aquesta mutació es modelitza amb un operador integral. La diferència essencial entre els models anteriors i aquest és que fixada la variable evolutiva encara queda un sistema dinàmic en dimensió infinita: un model de dinàmica de poblacions estructurades en edat.

En aquest primer capítol es tracta, a part del problema d'existència i unicitat de solucions del model, l'existència de solucions estacionàries i, com a principal resultat, s'estableixen condicions suficients per garantir l'existència (i en alguns casos unicitat) d'aquestes en diferents situacions (donades per possibles expressions de la mortalitat dels individus), i l'existència d'estratègia evolutivament estable (ESS) prenent com a tret evolutiu l'edat de maduració. Es donen, també, condicions suficients per a la seva existència.

En el segon capítol s'estudia un model per a una població de bacteris i bacteriòfags (*fags* per abreujar) lítics (és a dir, que el procés per a la seva reproducció infectant el bacteri també acaba amb la mort d'aquest) on la població de bacteris està estructurada per l'edat d'infecció per part del fag.

A part d'existència i unicitat de solucions del model biològic aquest capítol es centra en l'estudi sobre l'existència de valors d'un dels paràmetres (el període de latència o el temps que passa des que un fag envaeix un bacteri fins que aquest mor i s'alliberen els nous virus) per tal que s'optimitzi el creixement de la població de bacteriòfags. Aquest període de latència es considera de dimensió infinita en modelitzar-lo per una funció de distribució d'una variable aleatòria. Aquesta és la principal diferència entre aquest model i els que hi ha en treballs anteriors (en tots es considera el període de latència com un paràmetre unidimensional). Això porta a un problema d'optimització en dimensió infinita. Es distingeixen dos casos depenent de certes desigualtats que compleixin els diferents paràmetres del model, provant l'existència d'aquest període de latència òptim en el primer i l'existència i unicitat en el segon (d'altra banda el cas biològicament més interessant ja que la població de fags pot no extingir-se). En aquest cas també es prova que aquest òptim correspon a una delta de Dirac en un valor determinat del període de latència. Finalment es relaciona aquest període de latència òptim amb l'ESS prenent com a tret evolutiu aquest paràmetre, provant-ne l'existència i unicitat, i veient que no és cap altre que el període de latència òptim corresponent a la quantitat de bacteris constant en l'estat d'equilibri.

- María Barbero Liñán va llegir la seva tesi, dirigida per Miguel Carlos Muñoz Lecanda, titulada *Estudi geomètric de la anormalitat en problemes de control òptim per a sistemes de control i de control mecànic*, el dia 19 de desembre de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.

La teoria de control estudia les propietats d'un sistema dinàmic depenent de paràmetres que són determinats convenientment i que reben el nom de *controls*. Quan la trajectòria del sistema dinàmic que es cerca ha de minimitzar un funcional, com l'energia, la distància o el temps, ens trobem davant d'un problema de control òptim. Si mirem enrere en el temps, ens adonarem que la teoria de control òptim ha existit des de fa uns quants segles. De fet, alguns consideren que el seu origen es troba en el problema de la braquistòcrona plantejat a la comunitat matemàtica per J. Bernoulli el 1696.

En general, trobar una solució d'aquests problemes no és obvi. Una tàctica habitual és reduir el nombre de possibles solucions per mitjà de les condicions necessàries d'optimalitat que proporciona el principi del màxim de Pontryagin. Aquest principi es va explicar per primer cop en el Congrés Internacional de Matemàtics el 1958, a Edimburg (Escòcia), de la mà d'un grup d'investigadors russos que treballaven a l'Institut de Matemàtiques de Steklov. El principi del màxim de Pontryagin és considerat un dels punts clau en el desenvolupament de la teoria de control òptim, tant des d'un punt de vista matemàtic, com des del punt de vista de les aplicacions en medicina, economia, enginyeria, astronàutica, etc.

Recentment, s'ha començat a aplicar la geometria diferencial per tal d'assolir una millor comprensió de tots els elements involucrats en el principi del màxim de Pontryagin. Geomètricament, aquest principi associa al problema de control òptim un problema hamiltonià, en el qual es dobla la dimensió de l'espai de configuració inicial. Les solucions d'aquest problema hamiltonià estan definides en el fibrat cotangent de l'espai de fases. Aquelles que satisfacin unes determinades condicions s'anomenen extremals i són candidates a ésser solucions del problema de control òptim.

En aquesta tesi desenvolupem una demostració completa i geomètrica del principi del màxim de Pontryagin amb el propòsit d'entendre com la geometria diferencial pot ajudar a estudiar els diferents tipus de solucions que existeixen en un problema de control òptim. Investiguem acuradament els punts més delicats de la demostració, que, per exemple, inclouen les pertorbacions dels controls, l'aproximació lineal del conjunt de punts accessibles i la condició de separació dels anomenats cons tangents de pertorbacions que apareixen com a resultat de modificar els controls. A més a més, aquests cons tenen un paper clau en l'aproximació lineal del conjunt dels punts accessibles.

Entre totes les solucions d'un problema de control òptim, existeixen les corbes anormals. Aquestes corbes no depenen de la funció de cost la integral de la qual es vol minimitzar, sinó que només depenen de la geometria del sistema de control. En la literatura de control òptim, existeixen estudis sobre la anormalitat, tot i que només per a sistemes lineals o afins en els controls i sobretot amb funcions de cost quadràtiques en els controls. Nosaltres descrivim un mètode geomètric nou per caracteritzar tots els diferents tipus d'extremals (no només les anormals) de problemes de control òptim genèrics. Aquest mètode s'obté com una adaptació d'un algorisme de lligadures presimplèctic (Gotay, Nester, Hinds, 1978). El nostre interès en les corbes anormals és a causa de les corbes òptimes estrictament anormals, les quals també queden caracteritzades mitjançant l'algorisme descrit en aquesta tesi. L'existència de les corbes que acabem de mencionar es coneix en el problema de trobar els camins més curts en geometria subriemanniana (Montgomery, 1994; Liu, Sussmann, 1995).

Apliquem el mètode anterior per caracteritzar les extremals d'un problema de control òptim lliure, aquell on el domini de definició no està donat. En concret, els problemes de temps mínim són problemes de control òptim lliures. A més a més, som capaços de donar una corba extremal estrictament anormal aplicant el mètode descrit per a un sistema mecànic de control, però malauradament aquesta corba no és

una solució del problema ja que no minimitza la integral de la funció de cost.

Un cop la noció d'anormalitat ha estat estudiada en general, ens concentrem en l'estudi de la anormalitat per a sistemes de control mecànics, perquè no existeixen resultats sobre l'existència de corbes òptimes estrictament anormals per a problemes de control òptim associats a aquests sistemes. En aquesta tesi es donen resultats sobre les extremals anormals quan la funció de cost és quadràtica en els controls o si el funcional a minimitzar és el temps. Anant encara més enllà, la caracterització d'anormals és descrita en casos particulars mitjançant elements geomètrics com les formes quadràtiques vector valorades. Aquests elements geomètrics apareixen de manera natural com a resultat d'aplicar el mètode explicat en aquesta tesi.

També enfoquem l'estudi de la anormalitat de sistemes de control mecànics des d'un altre punt de vista que consisteix a aprofitar l'equivalència que existeix, sota determinades hipotèsis, entre els sistemes de control no holònoms i els sistemes de control cinemàtics. Provem l'equivalència entre els problemes de control òptim associats a ambdós sistemes de control i això permet establir relacions entre les corbes extremals del problema no holònom i del cinemàtic. Aquestes relacions permeten donar, aquesta vegada sí, un exemple d'una corba optimal estrictament anormal en un problema de temps mínim per a sistemes de control mecànics. Es tracta del primer exemple amb aquestes característiques que es coneix en la literatura, al nostre millor saber i entendre.

Finalment, i deixant de banda per un moment la anormalitat, donem una formulació geomètrica dels problemes de control òptim no autònoms mitjançant la formulació unificada de Skinner-Rusk (1983), que unifica en una les formulacions lagrangianes i hamiltonianes dels sistemes mecànics. La formulació descrita en aquesta tesi és fins i tot aplicable a sistemes de control implícits que apareixen en un gran nombre de problemes de control òptim dins l'àmbit de l'enginyeria, com, per exemple, els sistemes lagrangians controlats i els sistemes descriptors.